

**К РАЗРАБОТКЕ ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИИ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ВНЕСЕНИЯ
УДОБРЕНИЙ**

ГЕННАДИЙ ЛИЧМАН, Д.Т.Н.
Всероссийский НИИ Механизации
Сельского Хозяйства, Россия

САЯХАТ НУКЕШЕВ, К.Т.Н.
Казахский Агротехнический Университет
им. С.Сейфуллина, Казахстан

Title: ON ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL FOR TECHNOLOGY OF DIFFERENTIATED APPLICATION OF FERTILIZERS

UDC: 631.8

Key words: Soil fertility, mineral fertilizers, crop yield, response function

Annotation: The paper studies agricultural crops' yield depending on quality of entering of mineral fertilizers. It is established that determining average productivity, under square-law dependence of yield on a dose, there is not necessity to set the law of fertilizers distribution across the field and will be sufficient to know expected value D and standard deviation σ_D . The paper considers approaches to economic-mathematical model of optimization of fertilizers' doses at the differentiated entering. The produced result provides a new approach to the quality control in technological process of fertilizers application. Also, it allows formulating requirements to perspective technical means used for entering of mineral fertilizers.

Для каждой сельскохозяйственной культуры и конкретных природно-климатических условий существуют свои оптимальные параметры плодородия, соответствующие максимальной окупаемости агротехнических мероприятий, направленных на их обеспечение. Из-за несвоевременного выполнения технологических операций, нарушения технологических регламентов, неисправности технических средств, как правило, наблюдается существенное отклонение параметров плодородия от их оптимальных значений.

Так, например, из-за несовершенства дозирующих, распределяющих и заделывающих рабочих органов машин, технологий внесения не удаётся вносить удобрения с оптимальной дозой. Учитывая множество факторов, влияющих на качество распределения вносимого материала, многие из которых носят случайный характер (неровность поверхности поля, неоднородность физико-механических свойств удобрений, нестабильности скорости движения агрегата и т.д.), количество удобрений или мелиорантов, выпадающих на элементарную площадку можно рассматривать как случайную величину. Наличие функций отзывчивости сельскохозяйственных культур на тот или иной показатель плодородия позволяет более объективно оценивать степень влияния неравномерности распределения этого показателя на количество и свойства урожая, сформулировать требования к производству удобрений и качеству их внесения под программируемый урожай, уровню дифференциации воздействия на параметры плодородия.

Рассматривая среднюю урожайность Y как функцию случайного аргумента, независимо от закона распределения удобрений по полю, можно найти по формуле (Вентцель, 1962; Смирнов и Дунин-Барковский, 1969):

$$Y = M[Y(D)] = \int Y(D)\varphi(D)dD \quad (1)$$

где $\varphi(D)$ - плотность распределения дозы. Аналогично можно определить математическое ожидание функции отзывчивости сельскохозяйственной культуры на систему NPK,

$$Y = M[Y(N,P,K)] = \iiint Y(N,P,K)\varphi(N,P,K)dNdPdK, \quad (2)$$

где $\varphi(N,P,K)$ - плотность распределения системы NPK. Использовать формулы (1) и (2) для подсчета средней урожайности в зависимости от доз внесения удобрений можно в том случае, когда известны функции отзывчивости данной сельскохозяйственной культуры на удобрения и плотность распределения удобрений по полю.

Когда функция отзывчивости имеет квадратичный вид, вместо интегрирования для нахождения математического ожидания можно воспользоваться соотношением (Вентцель, 1962):

$$M[x^2] = D[x] + M^2[x], \quad (3)$$

где x - случайная величина; $D[x]$ - дисперсия x . Подставив вместо функции $Y(D)$ её аналитическое выражение в общем виде, после несложных преобразований получим:

$$Y = M[Y(D)] = a_0 + a_1D + a_2(\sigma_D^2 + D^2) \quad (4)$$

где σ_D -среднеквадратическое отклонение случайной величины D ; D - математическое ожидание случайной величины D .

Таким образом, при квадратичной зависимости урожайности от дозы для нахождения средней урожайности нет необходимости устанавливать закон распределения удобрений по полю, а достаточно знать только D и σ_D . Значения D и σ_D определяют, выполнив математическую обработку данных, полученных в результате агротехнической оценки машин по ОСТ 70.7.2.-82 и ОСТ 70.7.3.-82.

Наличие функций отзывчивости сельскохозяйственных культур на изменение того или иного показателя плодородия почвы или их совокупного влияния позволяет более объективно программировать урожайность, формулировать требования к машинным технологиям и техническим средствам, используемым для воздействия на эти показатели. Так из (4) следует, что с ростом неравномерности распределения удобрений по полю значительно ухудшается отзывчивость растений на удобрения. Поэтому на практике при определении оптимальных доз внесения удобрений необходимо принимать во внимание и показатель неравномерности распределения их по полю, так как, уменьшая этот показатель за счет более качественного внесения удобрений, можно существенно повысить их окупаемость.

В общем виде функции отзывчивости сельскохозяйственных культур на тот или иной показатель плодородия и качество его распределения по полю можно представить в виде:

$$Y = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k, V_{n1}, V_{n2}, \dots, V_{nk}), \quad (5)$$

где Π_1, \dots, Π_k - средние значения показателей плодородия; V_{n1}, \dots, V_{nk} - коэффициент вариации соответствующего показателя по полю.

Независимо от технологических схем внесения отклонение дозы внесения и равномерности распределения N , P , K по всей обрабатываемой площади должно удовлетворять условиям

$$D_3 - k D_3 \leq D \leq D_3 + k D_3, \quad V_{вн} \leq V_{вн доп}, \quad (6)$$

где D_3 - доза заданная; k - коэффициент, характеризующий допуск на отклонение дозы вносимых удобрений от заданной; D - доза внесения; $V_{вн}$ - коэффициент вариации внесения удобрений; $V_{вн доп}$ - допускаемое значение коэффициента вариации внесения удобрений.

В широкозахватных машинах-удобрителях, выполненных в виде отдельного бункера с высевающей системой и прицепляемого культиватора, материал распределяется по сошникам с помощью воздушного потока. При этом на неравномерность внесения влияют конструктивные и технологические параметры высевающей аппаратуры, транспортирующего материалопровода, центрального рас-

пределителя и распределителя удобрений сошника. Снижение неравномерности до уровня, допустимого агротехническими требованиями, можно при оптимизации их конструктивно-технологических параметров.

Формализация технологического процесса. Для технологического процесса внесения минеральных удобрений показателями эффективности могут служить: 1) качество внесения удобрений при условии, что затраты на внесение не превышают заданной величины; 2) стоимость единицы массы удобрений, при соблюдении требований к качеству удобрений.

Любой показатель эффективности R зависит от ряда параметров. Среди них основную роль играют параметры системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и параметры, характеризующие воздействие внешней среды $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$.

Таким образом,

$$R = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \quad (7)$$

Помимо параметров внешней среды, явно фигурирующих в математическом описании, показатель эффективности зависит также от структуры технологического процесса, характера связей между технологическими операциями и особенностей функционирования технических средств, вида управляющих алгоритмов. Эти зависимости будут учитываться как видом функции R (или видом алгоритма, позволяющим вычислить значения R , если явное выражение для него отсутствует), так и введением дополнительных, так называемых, структурных параметров.

Оптимальными считаются такие значения дозы, показатели качества, при которых достигается наибольшая урожайность сельскохозяйственной культуры при заданных затратах на выполнение операций внесения удобрений, мелиорантов, либо заданный эффект (запрограммированная урожайность) при наименьших затратах энергии и ресурсов, либо наибольшее значение эффекта по отношению к затратам.

При заданных затратах, связанных с внесением удобрений, значения показателей качества, при которых достигается наибольший эффект, рассматриваются как критерии оптимизации, а заданные затраты, как ограничения. Когда минимизируются затраты на обеспечение заданного уровня качества, критерием оптимизации являются затраты на выполнение технологических операций, а заданные значения показателей качества - ограничениями.

На первом этапе при разработке экономико-математической модели оптимизации ограничимся операциями внесения элементов питания и доведения их значений до заданного уровня. Для математической постановки задачи необходимо распола-

гать следующей информацией:

1. Данными о распределении питательных элементов в почве - средние значения $\bar{N}_П, \bar{P}_П, \bar{K}_П$ и коэффициенты вариации V_N, V_P, V_K .

2. Функциями отзывчивости данной сельскохозяйственной культуры (или нескольких культур, входящих в севооборот) на количество и качество распределения питательного элемента в почве или на их совокупность:

$$Y_N = Y_N(\bar{N}, V_N); Y_P = Y_P(\bar{P}, V_K), \dots \quad (8)$$

$$Y_{NPK} = Y_{NPK}(\bar{N}, \bar{P}, \bar{K}, V_N, V_P, V_K) \quad (9)$$

3. Затратами энергии E_{ijk} на выполнение i -ой операции, j -м техническим средством по k -ой технологии в зависимости от дозы и качества внесения N, P, K :

$$E_{ijk} = E_{ijk}(\bar{N}, \bar{P}, \bar{K}, V_N, V_P, V_K) \quad (10)$$

4. Функциями, описывающими зависимость количества клейковины, белка, нитратов и других потребительских, технологических свойств урожая от количества и качества распределения элементов питания в почве

$$f_1 = f_1(\bar{N}, \bar{P}, \bar{K}, V_N, V_P, V_K) \quad (11)$$

5. Функциями, отражающими негативное антропогенное влияние на тот или иной элемент (S) агроэкосистемы внесения данного элемента (например, N) с качеством распределения, характеризуемым коэффициентом вариации V_N , при i -ой операции, j -м техническим средством по k -ой технологии:

$$\mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}_{ijk}(\bar{N}, \bar{P}, \bar{K}, V_N, V_P, V_K). \quad (12)$$

Рассмотрим два возможных варианта постановки задачи:

1-й вариант. Оптимальные показатели качества распределения удобрений определяются для всего поля. В этом случае математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\min_{N, V_N} E_{ijk}(\bar{N}, \bar{P}, \bar{K}, V_N, V_P, V_K) \quad (13)$$

$$Y_0(N_P, P_P, K_P, V_{N_P}, V_{P_P}, V_{K_P}) + Y(N, P, K, V_{NPK}) \geq Y_{np}, \quad (14)$$

$$l_{\min} \leq f_1(N, P, K, V_N, V_P, V_K) \leq l_{\max}, \quad (15)$$

$$\mathcal{E}_{\min}^S \leq \mathcal{E}_{ijk}^S(N, P, K, V_N, V_P, V_K) \leq \mathcal{E}_{\max}^S, \quad (16)$$

где Y_0 - урожайность без внесения удобрений; Y - прибавка урожайности после внесения удобрений; $\mathcal{E}_{\min}^S, \mathcal{E}_{\max}^S$ - допуски на уровень загрязнения S -ой экосистемы.

Принимая во внимание, что коэффициент

вариации питательных элементов в почве V_{nN}, V_{nP}, V_{nK} зависит от качества внесения удобрений на поле $V_{вн}$, к ограничениям (13-16) необходимо добавить соотношение

$$f(V_{nN}, V_{nP}, V_{nK}, V_{вн}) = 0 \quad (17)$$

Решением системы (13-16) будут такие значения средних N^*, P^*, K^* и качество внесения их на поле V_N^*, V_P^*, V_K^* , при которых будет достигнута программируемая урожайность Y_{np} , будут удовлетворены требования к качеству получаемой продукции

$$k_{k \min} \leq k_k(\bar{N}^#, V_N^{\#}) \leq k_{k \max} \quad (18)$$

и к защите окружающей среды от загрязнения

$$\mathcal{E}_{\min}^S \leq \mathcal{E}^S(N^{\#}, V_N^{\#}) \leq \mathcal{E}_{\max}^S, \quad (19)$$

а затраты на внесение будут минимальными:

$$E_{ijk}(\bar{N}^{\#}, V_N^{\#}) = \min_{N, V} [E_{ijk}(N, V_N)]. \quad (20)$$

2-й вариант. Принимая во внимание сделанные ранее допущения и дополняя их предположением, что известна функция отзывчивости конкретной сельскохозяйственной культуры на минеральное удобрение, эффект (тенге) от внесения удобрений с учетом затрат на внесение, стоимость прибавки урожая и затрат на его транспортирование представляем в виде

$$Z = (A - T)[a_0 + a_1 D + a_2 D^2(1 + 1/10^4 V_{вн}^2)] - Z_{вн} - C_k, \quad (21)$$

где A - цена единицы продукции, тг/т; T - затраты на транспортирование единицы продукции, тг/т; a_0, a_1, a_2 - эмпирические коэффициенты, характеризующие функцию отзывчивости данной культуры на удобрения; D - доза внесения удобрения; $V_{вн}$ - коэффициент вариации внесения удобрений; $Z_{вн}$ - затраты на внесение физической массы удобрений; C_k - цена единицы массы минерального удобрения.

Присоединим к формуле (21) условие минимальности неравномерности внесения удобрений

$$\varphi(V_{вн}) = 0 \quad (22)$$

Тогда оптимальные показатели качества внесения удобрений по полю находим в результате максимизации эффекта, для чего определяем условный максимум функции (21), т.е.

$$\max Z_{вн} \quad \text{при } \varphi(V_{вн}) = 0 \quad (23)$$

Алгоритм оптимизации показателей качества. Отыскание условного максимума можно свести к исследованию на обычный максимум функции Лагранжа $L = Z + \lambda \varphi$.

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned} (V_{\text{вн}}) &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial V_{\text{вн}}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial V_{\text{вн}}} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Найденный в результате решения задачи значение $V_{\text{вн}}^*$ будет оптимальным для данной технологии внесения минеральных удобрений. Знание $V_{\text{вн}}^*$ позволяет по-новому подойти к задаче контроля и управления качеством технологического процесса внесения удобрений, а также сформулировать требования к перспективным техническим средствам для внесения минеральных удобрений.

Литература

- Вентцель, Е., 1962. Теория вероятностей, Москва, Физматгиз.
- Смирнов, Н., Дунин-Барковский, И., 1969. Курс теории вероятностей и математической статистики. Для технических приложений, Москва, Наука.